



第十四讲 等差数列

德国著名数学家高斯小时候就聪明过人，上小学时，有一天老师出了一道题让同学们计算： $1+2+3+4+\cdots+99+100=?$ 老师出完题后，全班同学都在埋头计算，小高斯却很快算出答案是 5050。小高斯为什么算得又快又准呢？原来小高斯通过细心观察发现： $1+100=2+99=3+98=\cdots=49+52=50+51$ 。1~100 正好可以分成 50 对这样的数，每对数的和都相等。于是，小高斯把这题巧算为： $(1+100)\times 100\div 2=5050$ 。小高斯能想出这种求和方法，真是聪明极了。后来人们把这种方法称为高斯定律。“高斯定律”广泛地应用于“等差数列”的求和问题，求解过程简单快捷。

若干个数排成一行称为数列，数列中的每一个数称为一项，其中第一项称为首项，最后一项称为末项。从小到大的数列中，从第二项起，后项与前项之差都相等的数列称为等差数列，后项与前项之差称为公差。数列中数的个数称为项数。例如：

(1) 1, 2, 4, 7, 11, \cdots , 121;

此数列是首项为 1、末项为 121 的数列。

(2) 1, 2, 3, 4, 5, \cdots , 100;

此数列是首项为 1、末项为 100、公差为 1 的等差数列。

(3) 8, 15, 22, 29, \cdots , 78;

此数列是首项为 8、末项为 78、公差为 7 的等差数列。

由“高斯定律”巧算可得到等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的求和公式为：

和 = (首项 + 末项) \times 项数 $\div 2$ ，记作： $S_n = (a_1 + a_n) \times n \div 2$ 。



经典范例



例 1 判断下面的数列中哪些是等差数列。

(1) 1, 3, 5, 7, 10, 13, 16, 19

(2) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

(3) 85, 75, 65, 55, \cdots , 15, 5

(4) 5, 9, 13, 17, 21, 23





点拨 根据等差数列的定义进行判断。

详解 (1) $3-1=2, 10-7=3, 2 \neq 3$,

所以此数列不是等差数列。

(2) $6-3=9-6=12-9=15-12=18-15=21-18=24-21=3$,

所以此数列是首项为 3、末项为 24、公差为 3 的等差数列。

(3) $85-75=75-65=65-55=\cdots=15-5=10$,

所以此数列是首项为 85、末项为 5、公差为 10 的等差数列。

(4) $9-5=13-9=17-13=21-17=4, 23-21=2, 4 \neq 2$,

所以此数列不是等差数列。

小结 判断一个数列是不是等差数列，不能只看数列中的某些数，要将整个数列中的每个数都观察到，只要发现相邻两个数的差不相等，这个数列就不是等差数列。另外，从大到小排列的数列，只要相邻两项的差都相等，这个数列也是等差数列。



例 2 计算： $1+4+7+10+\cdots+2005+2008=$ _____。

(2007 年“新希望杯”全国数学夏令营三升四试题)

点拨 观察算式，发现每两个加数之间相差 3，根据等差数列的定义可判断这是一个首项为 1、末项为 2008、公差为 3 的等差数列。两两配对相加。

详解 解法一：利用等差数列求和公式，

$$\begin{aligned} & 1+4+7+10+\cdots+2005+2008 \\ &= (1+2008) \times [(2008-1) \div 3 + 1] \div 2 \\ &= 2009 \times 670 \div 2 \\ &= 673015 \end{aligned}$$

解法二：我们将算式倒着写一遍，与原式进行对照

$$1+4+7+10+\cdots+2005+2008$$

$$2008+2005+2002+1999+\cdots+4+1$$

对应项相加得： $\underbrace{2009+2009+2009+\cdots+2009+2009}_{(2008-1) \div 3 + 1 \text{ 个 } 2009}$,

$$(2008-1) \div 3 + 1 = 2007 \div 3 + 1 = 670,$$

所以 $1+4+7+10+\cdots+2005+2008$

$$= 2009 \times 670 \div 2$$

$$= 673015$$

小结 在本专题的开头，我们已经介绍了等差数列求和的计算公式，但同学们一定要知道公式的由来，所以在本例中介绍了两种解法，在弄清楚了等差数列的求和公式的推导过程后，再利用公式进行计算，这样在理解的基础上利用公式解决问题时会更加清晰。我们需要注意的是，在等差数列求和过程中，项数往往不会直接告知，这就要根据公式来求出项数后再求和。注：项数 $= (\text{末项} - \text{首项}) \div \text{公差} + 1$ ，记作： $n = (a_n - a_1) \div d + 1$ 。



例 3 一列数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 中相邻两数的差(后一个数减前一个数)相等, 若 $a_2 = 13, a_6 = 49$, 那么这列数有_____项在 500~1000 之间。

(第六届“新希望杯”全国数学大赛四年级试题)

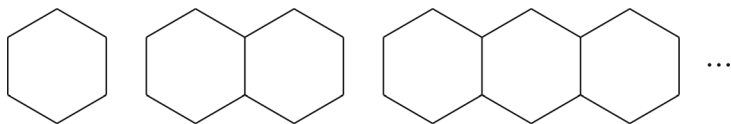
点拨 由题意知这是一个等差数列, 等差数列通项公式为: $a_n = a_1 + (n-1)d$, 那么此题就是需要我们计算出有多少个 n 使得 a_n 符合题意。

详解 $d = (49 - 13) \div (6 - 2) = 9, a_1 = 13 - 9 = 4,$
 $a_{57} = 4 + 9 \times 56 = 508 > 500 > a_{56} = 4 + 9 \times 55 = 499,$
 $a_{111} = 4 + 110 \times 9 = 994 < 1000 < a_{112} = 4 + 111 \times 9 = 1003,$
 $111 - 57 + 1 = 55(\text{项}),$
 所以这列数在 500~1000 之间的数有 55 项。

小结 求解此类题, 要先求出公差, 再算出满足条件的最小数和最大数, 最后求个数。



例 4 如图, 搭 1 个六边形需 6 根小木棒, 搭 2 个六边形需 11 根小木棒, 搭 3 个六边形需 16 根小木棒……搭 27 个六边形需_____根小木棒。



(第七届“新希望杯”全国数学大赛四年级试题)

点拨 这道题是等差数列的实际应用, 观察图形, 不难发现, 后一个图形与前一个图形所需小木棒的差是一定的, 都是 5, 那么可以判断每个图形所需的小木棒数是一个首项为 6、公差为 5 的等差数列。

详解 $6 + (27 - 1) \times 5 = 6 + 26 \times 5 = 6 + 130 = 136(\text{根}).$

小结 生活中有很多跟等差数列有关的实际问题, 在求解相关问题时, 首先一定要注意判断是不是等差数列, 其次要能将题中的已知条件与等差数列的各个量进行对应, 这样才能运用等差数列的相关知识解决问题。



例 5 将 1~200 按下面的方法分成三组:

A组: 1, 4, 7, 10, 13, 16, ...

B组: 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...

C组: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...

问: (1) B组一共有多少个数?

(2) 135 是哪一组的第几个数?

点拨 这三组数列是首项分别为 1、2、3, 公差都是 3 的等差数列。运用等差数列的相关公式便可求出结果。



详解 (1) B 组首项为 2, 公差为 3,

那么这个数列第 n 项的数应该是 $2 + 3 \times (n - 1)$,

这个数要不超过 200,

经推算可得这组数最大的一个是 $2 + 3 \times 66 = 200$,

B 组一共有 $66 + 1 = 67$ (个) 数。

(2) A 组的数被 3 除, 余数都是 1,

B 组的数被 3 除, 余数都是 2,

C 组的数被 3 除, 余数都是 0,

$135 \div 3 = 45$,

所以 135 是 C 组中的第 45 个数。

答: B 组一共有 67 个数, 135 是 C 组中的第 45 个数。

小结 做这一类较为复杂的等差数列的题目时, 要学会根据问题的特点灵活变换, 运用相关公式。其中第 (2) 问运用了余数的知识, 找到了各组数列中数的共同点, 这样便于判断 135 属于哪一组。



例 6 一个阶梯教室有 10 排座位, 第一排有 12 个座位, 往后每排比前一排多 2 个座位, 这个教室一共有多少个座位?

点拨 这个教室 10 排的座位数是一个首项为 12、公差是 2 的等差数列。

详解 第 10 排有 $12 + (10 - 1) \times 2 = 30$ (个) 座位,

这个教室一共有 $(12 + 30) \times 10 \div 2 = 210$ (个) 座位。

答: 这个教室一共有 210 个座位。

小结 生活中的很多问题都跟等差数列有关, 掌握并能灵活运用等差数列的相关公式, 可以帮助我们更好地解决生活中的实际问题。



挑战自我

1. 判断下面数列哪些是等差数列。

(1) $0, 1, 2, 3, 4, \dots, 99, 101$

(2) $3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, \dots, 150$

(3) $700, 693, 686, 679, 672$

(4) $5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 25, 27, 29$

根据定义判断





2. 计算: $1+2+3+4+\cdots+199+200$

3. 计算: $2012-2011+2010-2009+\cdots+4-3+2-1$

4. 已知一列数: $2, 5, 8, 11, 14, \cdots$, 问: 80 是这列数中第几个数?

5. 在等差数列 $6, 13, 20, 27, \cdots$ 中, 从左往右数, 第几个数是 2015 ?

6. 有一列数是这样排列的: $3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, \cdots$, 数列中的第 28 个数是多少?

7. 一个报告厅有 20 排座位, 第一排有 32 个座位, 往后每排都比前一排多 2 个座位, 这个报告厅一共有多少个座位?

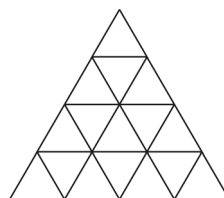
8. 现有 49 把钥匙和 49 把锁, 每一把钥匙都能开一把锁, 且每一把锁也只能被一把钥匙打开, 最多要试多少次才能配好全部的钥匙和锁?

9. 一个等差数列: $28 \times 2, 28 \times 4, 28 \times 6, \cdots$, 求这个等差数列中第 2012 项的积。



10. 在小于 500 的自然数中,有多少个数是 13 的倍数? 求这些数的和。

11. 在下图中,每个最小的等边三角形的面积是 17 平方厘米,边长是 1 根火柴棍。问:(1)最大的三角形的面积是多少平方厘米?(2)整个图形由多少根火柴棍摆成?



12. 一个盒子里放有 3 个一模一样的小球,一位魔术师第一次从盒子里拿出 1 个球,将它变成 3 个球后放回盒子里;第二次从盒子里拿出 2 个球,将每个球变成 3 个球后放回盒子里……第九次从盒子里拿出 9 个球,将每个球变成 3 个球后放回盒子里,这时盒子里一共有多少个小球?